САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Котелина Надежда Олеговна

СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛУДИЗАЙНЫ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО СФЕРЕ

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2013

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Института точных наук и информационных технологий Сыктывкарского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ПЕВНЫЙ Александр Борисович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор МАЛОЗЁМОВ Василий Николаевич (Санкт-Петербургский государственный университет)
	кандидат физико-математических наук, профессор ИСАКОВ Валериан Николаевич (Коми государственный педагогический институт)
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский Академический университет РАН

Защита состоится 16 мая 2013 г. в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.232.49 при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___» _________ 2013 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Ю. В. Чурин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Понятие *сферического t-дизайна* было введено Ф. Дельсартом, Й. Гётальсом, Й. Зайделем в 1977 г. С тех пор Н. Н. Андреев, Б. Б. Венков, В. А. Юдин, Н. Слоан, Е. Боннаи занимались проблемами существования, строения и нахождения дизайнов заданного порядка на сфере заданной размерности. Сферические дизайны — это особый класс сферических кодов, т. е. конечных множеств точек на сфере S^{n-1}. Мотивом для их изучения послужило приближённое вычисление интегралов по сфере S^{n-1}. Интеграл от алгебраического полинома степени не выше t по сфере может быть вычислен как среднее от значений полинома в точках дизайна порядка t.

Сферические дизайны обладают рядом экстремальных свойств. В частности, Б. Б. Венков доказал, что для сферических дизайнов порядка t сумма всевозможных скалярных произведений их элементов, возведённых в чётную степень t (*t-потенциал*), достигает минимума. Этот результат можно обобщить, если рассматривать симметричные сферические дизайны, брать из них половину векторов (*сферические полудизайны*), а затем сопоставлять элементам нового множества некоторые веса. Тогда t-потенциал с весами достигнет минимума на *взвешенных сферических полудизайнах.* В. А. Юдин доказал экстремальные свойства сферических дизайнов, использующие полиномы Гегенбауэра. Аналогичные экстремальные свойства могут быть доказаны и для полудизайнов. Элементы взвешенного полудизайна (со знаками $+$ и $-$) можно брать в качестве узлов кубатурной формулы для вычисления интегралов по сфере, а веса — в качестве её коэффициентов.

Теорией кубатурных формул занимались И. Радон, А. Строуд, Д. Максвелл, С. Л. Соболев, В. И. Крылов, И. П. Мысовских, В. И. Лебедев. При фиксированной степени точности d они стремились минимизировать количество узлов кубатурных формул. Оценки снизу для количества узлов кубатурных формул с заданной степенью точности d получали И. П. Мысовских и Ф. Дельсарт.

Английский математик Э. Варинг (1734 – 1798) поставил задачу о представлении формы $\|x\|^t = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{t/2}$ при чётной степени t в виде суммы линейных форм, возведённых в степень t. Различные представления получали в 19 веке Е. Лукас, Ж. Лиувилль, А. Гурвиц и другие математики. Результаты этих исследований систематизированы в мемуаре Б. Резника [1].

В некоторых случаях с помощью представления для $\|x\|^t$ можно получать взвешенные сферические полудизайны порядка t и строить с их помощью кубатурные формулы со степенью точности $d = t + 1$ и с числом узлов, меньшим, чем в известных формулах.

Цель работы.

1. *Введение понятия сферического полудизайна и детальное изучение свойств сферических полудизайнов.*

2. *Введение понятий взвешенного сферического полудизайна и несферического полудизайна, изучение их свойств.*

3. *Исследование связей между взвешенными сферическими полудизайнами и кубатурными формулами для вычисления интегралов по сфере.*

Методика исследования. В диссертационной работе использовались методы теории сферических дизайнов, теории фреймов, теории кубатурных формул.

Результаты, выносимые на защиту.

1. *Введено понятие сферического t-полудизайна. Установлено, что минимум t-потенциала достигается на сферических t-полудизайнах и только на них.*

2. *Установлен критерий сферических полудизайнов в терминах полиномов Гегенбауэра. Установлено, что минимум потенциалов В. А. Юдина достигается на сферических t-полудизайнах и только на них.*

3. *Доказано необходимое и достаточное условие для сферического t-полудизайна в терминах кубатурных формул. Строится кубатурная формула с узлами в точках сферического полудизайна, точная для полиномов степени не выше $t + 1$.*

---

[1] Reznick B. *Sums of even powers of real linear forms* // Mem. Am. Math. Soc. 1992. Vol. 96. No. 463. P. 1–155.

4. *Неравенство для t-потенциала обобщается на случай произвольного вектора весов $W = (W_1, \ldots, W_m)$: $\sum_{i=1}^{m} W_i = 1$. Введено понятие взвешенного сферического t-полудизайна. Установлено, что неравенство для t-потенциала с весами достигается на взвешенных сферических t-полудизайнах и только на них.*

5. *Введено понятие несферического полудизайна порядка t. Доказано, что обобщённое на случай произвольных векторов неравенство для t-потенциала достигается на несферических t-полудизайнах и только на них.*

6. *Получен критерий взвешенных сферических полудизайнов в терминах кубатурных формул. Строится кубатурная формула с узлами в точках взвешенного сферического t-полудизайна, точная для полиномов степени не выше $t + 1$.*

7. *Построены некоторые кубатурные формулы для вычисления интегралов по сфере с числом узлов, меньшим, чем в известных формулах.*

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Разработана теория сферических полудизайнов, включающая в себя критерии сферического полудизайна, связанные с t-потенциалами и с потенциалами В. А. Юдина. Построены некоторые кубатурные формулы для вычисления интегралов по сфере.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах и конференции:

- семинар кафедры вычислительной математики математико-механического факультета СПбГУ;

- семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD) (`http://dha.spb.ru`);

- Международная научная конференция «Теория приближений» (Санкт-Петербург, 6–8 мая 2010 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано четыре работы [1–4], перечисленные в конце автореферата. Статьи [1–3] опубликованы в изданиях из перечня ВАК.

Работы [2–4] написаны в соавторстве. В статье [2] диссертантом проведено доказательство основной теоремы и найдены коэффициенты в кубатурной формуле со степенью точности 9. В статье [3] А. Б. Певному принадлежит идея ввести понятие полудизайна и постановка задачи об обобщении неравенства для t-потенциала для произвольных ненулевых векторов. Доказательство обобщённого неравенства для t-потенциала и условия достижения в нём равенства принадлежат диссертанту. В статье [4] А. Б. Певный предложил ввести понятие взвешенного сферического полудизайна и поставил задачу обобщить неравенство для t-потенциала на случай произвольных весов. Доказательство неравенства с весами и критерия равенства в нём осуществлены диссертантом. В тезисах доклада [5] на Международной конференции "Теория приближений" анонсируются некоторые результаты из [3].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 2 глав, разбитых на 15 параграфов, списка литературы, включающего 54 наименования. Объём диссертации — 117 страниц.

Содержание работы

В первой главе диссертации рассматриваются сферические полудизайны и взвешенные сферические полудизайны. В первом параграфе изучаются свойства сферических полудизайнов. Понятие сферического полудизайна является новым и впервые появилось в работе Н. О. Котелиной, А. Б. Певного [3].

Пусть заданы натуральные числа $n \geqslant 2$, m, t, причём t чётное. Используем скалярное произведение $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ векторов x, $y \in \mathbb{R}^n$ и норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

Возьмём систему векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$. В диссертации рассматривается тождество, которое именуется *тождеством Варинга*, в честь английского математика Э. Варинга, поставившего задачу о представлении формы $\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{t/2}$ в виде суммы степеней порядка t линейных форм $\langle\varphi_i, x\rangle$:

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\langle\varphi_i, x\rangle\right]^t = A_t\|x\|^t, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Система векторов* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$*, для которой существует константа* $A_t > 0$ *такая, что выполняется тождество* (1)*, называется сферическим полудизайном порядка* t*.*

В первом параграфе установлено следующее свойство сферических полудизайнов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Сферический* t*-полудизайн* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *является сферическим* p*-полудизайном для всех* $p = 2, 4, \ldots, t$*, с константой* $A_p = c_p m$*, где*

$$c_p = \frac{(p-1)!!}{n(n+2)\cdots(n+p-2)}. \tag{2}$$

Далее получено ещё одно эквивалентное определение сферического полудизайна порядка t.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть задана система векторов* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$*. Для того чтобы система* Φ *была сферическим полудизайном порядка* t*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Q(\varphi_i)$$

для любого однородного полинома $Q(x)$ *степени* t *от* n *переменных. Здесь* σ_n *— площадь сферы* S^{n-1}*.*

С каждым сферическим t-полудизайном связана кубатурная формула, точная для всех полиномов степени не выше $t+1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть* t *— натуральное чётное число, система* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *— сферический* t*-полудизайн. Положим* $\varphi_{m+i} = -\varphi_i$*,* $i \in \in 1 : m$*. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{2m} Q(\varphi_i) \tag{3}$$

для любого полинома $Q(x)$ *степени не выше* $t+1$*.*

Во втором параграфе рассматриваются сферические полудизайны порядка 2. В этом случае сферические полудизайны представляют собой *жёсткие* *фреймы*. Рассматриваются вещественные гармонические фреймы и доказывается, что они являются сферическими 2-полудизайнами в $\mathbb{R}^n$.

В третьем параграфе вводятся сферические дизайны.

Пусть t целое, $t \geqslant 2$. Приведём определение сферического дизайна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Система $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ — сферический дизайн порядка t, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и всех $p = 0, 1, \ldots, t$ выполняется равенство*

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\big[\langle\varphi_i, x\rangle\big]^p = \begin{cases} c_p\|x\|^p, & p \text{ чётное,} \\ 0, & p \text{ нечётное,} \end{cases}$$

где c_p определяются по формуле (2) при чётных $p \geqslant 2$, а $c_0 = 1$.

В третьем параграфе вводится также понятие симметричного сферического дизайна. Для чётных t устанавливается связь между определениями симметричного сферического $(t+1)$-дизайна и сферического t-полудизайна.

Существует также определение сферического t-дизайна через кубатурные формулы, точные для всех полиномов $Q(x)$ степени не выше t.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Система $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется сферическим t-дизайном, если выполнено тождество*

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S^{n-1}} Q(x)\,dS = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Q(\varphi_i) \tag{4}$$

для всех полиномов $Q(x)$ степени не выше t. Здесь σ_n — это площадь сферы S^{n-1}.

Известно, что определения 2 и 3 эквивалентны.

Введём понятие *t-потенциала* для системы векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$:

$$P_t(\Phi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\big[\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle\big]^t, \tag{5}$$

где t — натуральное чётное число. Для $t = 2$ потенциал называется *фреймовым потенциалом.*

В четвёртом параграфе приводится неравенство В. М. Сидельникова – Б. Б. Венкова для t-потенциала. Для любой системы $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$

выполняется неравенство

$$P_t(\Phi) \geqslant c_t m^2, \tag{6}$$

где константа c_t определена формулой (2) при $p = t$.

Справедливо следующее экстремальное свойство сферических t-полудизайнов.

ТЕОРЕМА 2. *Неравенство* (6) *обращается в равенство на сферических* t*-полудизайнах и только на них.*

Теорема 2 является следствием более общей теоремы, установленной далее в диссертации.

В пятом параграфе «Вершины икосаэдра» доказывается, что вершины икосаэдра образуют сферический 5-дизайн. В этом параграфе для системы Φ_{12} из всех 12 вершин икосаэдра, вписанного в сферу S^2, вычисляется матрица Грама G. Вид матрицы G позволяет доказать свойство вершин икосаэдра:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \pm \tfrac{1}{\sqrt{5}}, \quad i \neq j, \ |i-j| \neq 6, \ i,j \in 1:12.$$

Далее это свойство используется при вычислении 4-потенциала системы Φ_6 из половины вершин икосаэдра, с помощью которого доказано указанное свойство икосаэдра.

В шестом параграфе «Вершины додекаэдра» рассматривается додекаэдр, двойственный к икосаэдру из предыдущего параграфа, вписанный в сферу S^2. Его вершинами являются центры граней икосаэдра, спроектированные на сферу. Вычисляются координаты всех вершин додекаэдра, выписывается матрица Грама для соответствующей системы Ψ_{20} и устанавливается, что Ψ_{20} является сферическим дизайном порядка 5.

Существует ещё одно экстремальное свойство сферических t-полудизайнов, в формулировке которого используются полиномы Гегенбауэра $G_k(u)$. В седьмом параграфе в качестве подготовительного шага доказываются формула сложения и неотрицательная определённость для полиномов Гегенбауэра.

В восьмом параграфе доказывается критерий для сферических полудизайнов в терминах полиномов Гегенбауэра.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть t — натуральное чётное число. Для того, чтобы* *система $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ была сферическим t-полудизайном, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\sum_{i=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i, x\rangle\big) = 0, \quad x \in S^{n-1}, \quad k = 2, 4, \ldots, t. \tag{7}$$

Заметим, что в случае t-дизайна равенства (7) должны выполняться при всех $k = 1, 2, \ldots, t$.

Далее для системы векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ на сфере S^{n-1} определяем потенциалы В. А. Юдина

$$U_k(\Phi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} G_k\big(\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle\big), \qquad k = 1, 2, \ldots, t.$$

Поводом для введения названия «потенциал» послужила неотрицательность выражений $U_k(\Phi)$, которая следует из формулы сложения для полиномов Гегенбауэра.

В восьмом параграфе доказывается критерий сферических полудизайнов в терминах потенциалов $U_k(\Phi)$:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть t — натуральное чётное число. Система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ является сферическим t-полудизайном тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$U_k(\Phi) = 0, \quad k = 2, 4, \ldots, t.$$

Достижение потенциалами $U_k(\Phi)$ минимума, равного нулю, на сферических t-полудизайнах и только на них в диссертации именуется *вторым экстремальным свойством t-полудизайнов.*

В девятом параграфе неравенство Сидельникова – Венкова (6) обобщается на случай произвольных весов.

Пусть t — натуральное чётное число, система $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ лежит на сфере S^{n-1}. Рассматривается квадратная матрица A размера m с элементами

$$a_{ij} = \big[\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle\big]^t, \quad i, j \in 1:m.$$

Эта матрица является неотрицательно определённой:

$$\langle AW, W\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех } W \in \mathbb{R}^m.$$

Неравенство Сидельникова – Венкова может быть переписано так:

$$\langle AW_0, W_0\rangle \geqslant c_t, \qquad W_0 = \left(\tfrac{1}{m}, \dots, \tfrac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^m.$$

В диссертации устанавливается более общее неравенство.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть t — натуральное чётное число, задана система векторов $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ на сфере S^{n-1} и вектор $W \in \mathbb{R}^m$ такой, что $\sum_{i=1}^m W_i = 1$. Тогда справедливо неравенство*

$$\langle AW, W\rangle \geqslant c_t. \tag{8}$$

Далее доказывается необходимое и достаточное условие равенства в неравенстве (8).

ТЕОРЕМА 6. *Для того, чтобы в (8) имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\sum_{i=1}^m W_i[\langle \varphi_i, x\rangle]^t = c_t\|x\|^t, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

З а м е ч а н и е. По аналогии с тождеством (1) тождество (9) названо *тождеством Варинга с весами.*

Условие (9) стало основой для введения понятия взвешенного сферического полудизайна, которое является новым и появилось впервые в работе Н. О. Котелиной, А. Б. Певного [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Пусть вектор $W = (W_1, \dots, W_m) \in \mathbb{R}^m$ такой, что $\sum_{i=1}^m W_i = 1$. Система $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$ называется взвешенным сферическим полудизайном порядка t с вектором весов W, если выполнено тождество* (9).

Таким образом, неравенство (8) обращается в равенство на взвешенных сферических полудизайнах порядка t и только на них.

Для краткости введём обозначение (Φ, W) для взвешенного сферического полудизайна Φ с вектором весов W.

Взвешенные сферические t-полудизайны обладают следующим свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть пара* (Φ, W), *где* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, *— взвешенный сферический полудизайн порядка* t. *Тогда пара* (Φ, W) *является взвешенным сферическим полудизайном порядка* p *для любого* $p = 2, 4, \ldots, t-2$.

В девятом параграфе вводится также определение взвешенного сферического дизайна порядка t через систему тождеств и для чётных t устанавливается связь между определениями взвешенного симметричного сферического $(t+1)$-дизайна и взвешенного сферического t-полудизайна. Приводится пример, связанный с минимальными векторами решётки Коркина-Золотарёва E_8. Для таких векторов доказывается тождество Варинга с весами и устанавливается, что эти векторы образуют в пространстве $\mathbb{R}^8$ взвешенный сферический дизайн порядка 7 с весами $W_i = \frac{1}{240}$.

В десятом параграфе рассматриваются t-полудизайны в $\mathbb{R}^n$, состоящие из векторов разной длины. Это понятие впервые появилось в работе Н. О. Котелиной, А. Б. Певного [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Пусть* t *— натуральное чётное число. Система ненулевых векторов* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset \mathbb{R}^n$, *для которой существует константа* $A_t > 0$ *такая, что выполняется тождество* (1), *называется несферическим полудизайном порядка* t.

В десятом параграфе неравенство Сидельникова – Венкова обобщается на случай ненулевых векторов из $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 7. *Для любой системы ненулевых векторов* $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$P_t(\Phi) \geqslant c_t \Big(\sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|^t\Big)^2, \tag{10}$$

где константа c_t *определяется формулой* (2) *при* $p = t$. *Равенство в* (10) *достигается на* t*-полудизайнах и только на них.*

При $t = 2$ неравенство (10) доказал P. Casazza.

Вторую главу открывает одиннадцатый параграф, в котором устанавливается критерий взвешенных сферических полудизайнов в терминах кубатурных формул.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть задана система векторов* $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ *на сфере* S^{n-1} *и вектор* $W = (W_1, \dots, W_m) \in \mathbb{R}^m$ *такой, что* $\sum_{i=1}^m W_i = 1$. *Для того чтобы пара* (Φ, W) *была взвешенным сферическим полудизайном порядка* t, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS = \sum_{i=1}^m W_i Q(\varphi_i) \tag{11}$$

для любого однородного полинома $Q(x)$ *от* n *переменных* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *степени* t.

Равенство (11) выполняется также для любого однородного полинома $Q(x)$ степени $0, 2, \dots, t$. Чтобы оно выполнялось для полиномов нечётной степени, добавляем узлы $-\varphi_1, \dots, -\varphi_m$. Получаем кубатурную формулу

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{S^{n-1}} Q(x)\, dS \approx \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} W_i \big(Q(\varphi_i) + Q(-\varphi_i)\big), \tag{12}$$

точную для всех полиномов от n переменных степени не выше $t+1$.

Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть пара* (Φ, W), *где* $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset S^{n-1}$, $W \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m W_i = 1$, *является взвешенным сферическим* t*-полудизайном. Тогда кубатурная формула* (12) *является точной для любого полинома* $Q(x)$ *от* n *переменных* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *степени не выше* $t+1$.

В параграфах с двенадцатого по пятнадцатый приводятся примеры построения взвешенных сферических полудизайнов порядка 4, 6, 8, 10, 12 и соответствующих кубатурных формул степени точности 5, 7, 9, 11, 13. Все кубатурные формулы строятся по приведённому выше методу. Например, в тринадцатом параграфе получены взвешенный сферический полудизайн порядка 6 и соответствующая кубатурная формула степени точности 7. При их построении используется тождество из книги Б. Резника:

$$\begin{aligned} 540\|x\|^6 = 378x_1^6 + 378x_2^6 + 280x_3^6 + \sum_{i=1}^2 (\sqrt{3}x_i \pm 2x_3)^6 + \\ + \sum (\sqrt{3}x_1 \pm \sqrt{3}x_2 \pm x_3)^6, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{13}$$

В диссертации доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Система векторов*

$$\Phi = \Big\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),\tfrac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3},0,\pm 2),\tfrac{1}{\sqrt{7}}(0,\sqrt{3},\pm 2),\; \tfrac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3},\pm\sqrt{3},\pm 1)\Big\} \tag{14}$$

образует взвешенный сферический 6-*полудизайн в пространстве* $\mathbb{R}^3$.

Для системы Φ устанавливается тождество Варинга при $t = 6$ с вектором весов $W \in \mathbb{R}^{11}$: $W = \left(\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{2}{27},\frac{49}{540},\dots,\frac{49}{540}\right)$. Следовательно, пара (Φ, W) является взвешенным сферическим 6-полудизайном и можно написать следующую кубатурную формулу со степенью точности 7:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} Q(x)\,dS \approx \sum_{i=1}^{11}\frac{W_i}{2}\big(Q(\varphi_i)+Q(-\varphi_i)\big). \tag{15}$$

Число узлов в данной формуле равно 22.

С помощью взвешенных сферических полудизайнов были получены некоторые новые кубатурные формулы для вычисления интегралов по сфере с меньшим количеством узлов, чем в книге И. П. Мысовских[2]:

1. Для $n = 3$ построена кубатурная формула степени точности $d = 7$ со следующими узлами и коэффициентами

   $$\begin{array}{ll} (\pm 1,0,0),\ (0,\pm 1,0) & \dfrac{1}{20}; \\ (0,0,\pm 1) & \dfrac{1}{27}; \\ \tfrac{1}{\sqrt{7}}(\pm\sqrt{3},0,\pm 2),\ \tfrac{1}{\sqrt{7}}(0,\pm\sqrt{3},\pm 2) & \dfrac{49}{1080}; \\ \tfrac{1}{\sqrt{7}}(\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{3},\pm 1) & \dfrac{49}{1080}. \end{array}$$

   Число узлов в этой формуле равно 22.

2. Для $n = 8$ построена кубатурная формула степени точности $d = 7$ со следующими узлами и коэффициентами

   $$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1^2, 0^6);\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\dots,\pm\frac{1}{2}\right) \text{ с чётным числом плюсов } \quad \frac{1}{240}.$$

   Число узлов в этой формуле равно 240 и является минимальным.

[2]Мысовских И. П. *Интерполяционные кубатурные формулы.* М.: Наука, 1981. 336 с.

3. Для $n \geqslant 3$ построена кубатурная формула степени точности $d = 7$ со следующими узлами и коэффициентами

$$\begin{array}{ll}
(\pm 1, 0^{n-1}) & \dfrac{8-n}{n^3+6n^2+8n}; \\
\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, \pm 1, 0^{n-2}) & \dfrac{4}{n^3+6n^2+8n}; \\
\dfrac{1}{\sqrt{n}}(\pm 1, \ldots, \pm 1) & \dfrac{n^2}{2^n(n^2+6n+8)}.
\end{array}$$

Число узлов в этой формуле равно $2n^2 + 2^n$ и при $n = 4, \ldots, 8$ меньше, чем в известных формулах.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[1] **Котелина Н. О. Обобщение неравенства Б. Б. Венкова и взвешенные сферические полудизайны // В мире научных открытий. 2012. № 8.1(32). С. 108–120.**

[2] **Котелина Н. О., Певный А. Б. Взвешенные сферические полудизайны и кубатурные формулы для вычисления интегралов по сфере // Известия вузов. Математика. 2013. № 2. С. 49–55.**

[3] **Котелина Н. О., Певный А. Б. Экстремальные свойства сферических полудизайнов // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. Вып. 5. С. 162–170. (English translation: St. Petersburg Math. J. 2011. Vol. 22. No. 5. P. 795-801.)**

Другие публикации:

[4] Котелина Н. О., Певный А. Б. Неравенство Венкова с весами и взвешенные сферические полудизайны // Проблемы математического анализа. 2011. Вып. 55. С. 29–36. (English translation: J. Math. Sci. 2011. Vol. 173. No. 6. P. 674–682.)

[5] Котелина Н. О., Певный А. Б. Экстремальные свойства сферических полудизайнов // Тезисы докладов Международной конференции «Теория приближений». Санкт-Петербург, 6–8 мая 2010. С. 51–53.

[6] Котелина Н. О. Оценка снизу количества элементов сферического дизайна с помощью линейного программирования // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD). Избранные доклады. 29 мая 2010 г. (http://dha.spb.ru/reps10.shtml#0529).

[7] Котелина Н. О. Формула сложения для полиномов Гегенбауэра // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD). Избранные доклады. 13 ноября 2010 г. (http://dha.spb.ru/reps10.shtml#1113).